Formelsammlung Mechanik 2 UE

Inhalt: Kinematik, Kinetik, Schwingungen, Stoß

Autor: Jakob Stracke

1. Allgemeine Bewegungen (Translation, Rotation oder Mischform)

a) $\frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = \dot{s}(t)$

b) $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t) = \dot{v}(t)$

2. Rotation (konstanter Radius)

a) $v_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

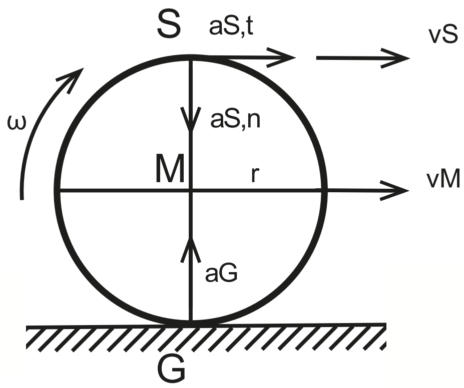
b) $a_{rot} = \vec{\dot{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

3. Rollendes Rad (reines Rollen = Haften)

$v_G = 0$ $\quad a_G = \omega^2 r$

$v_M = \omega r$ $\quad a_M = \dot{\omega} r$

$v_S = 2\omega r$ $\quad a_{S,t} = 2\dot{\omega} r \quad a_{S,n} = \omega^2 r$



Achtung: Gilt immer relativ gegenüber Unterlage!

4. Absolutkinematik

a) Vektor Addition $\quad \vec{v}B_{abs} = \vec{v}A_{abs} + \vec{v}BA_{abs}$

- ACHTUNG: $\vec{v}BA_{abs}$ ist KEINE Relativgeschwindigkeit!

- Sowohl $\vec{v}A_{abs}$ als auch $\vec{v}BA_{abs}$ müssen inertial abgeleitet werden!

- Wenn $\vec{v}A_{abs}$ oder $\vec{v}BA_{abs}$ mit Rotationsformel berechnet werden, unbedingt auf die jeweilige Absolutwinkelgeschwindigkeit achten!

b) Vektor Ableitung

- VOR der Ableitung immer darauf achten, in welchem KS der Vektor dargestellt ist und gegenüber welchem KS man ableitet!

- Wenn gegenüber demselben KS abgeleitet wird wie dargestellt, einfach (komponentenweise) ableiten. Einheitsvektoren bleiben gleich.

- Wenn gegenüber anderem KS abgeleitet wird wie dargestellt, dann mit Ableitungsformel ableiten. Z.B. Vektor $\vec{a}_{1|_F}$ ist in einem Führungssystem dargestellt, abgeleitet wird aber gegenüber einem Inertialsystem:

$$\frac{d|_0 \vec{a}_{1|_F}}{dt} = \frac{d|_F \vec{a}_{1|_F}}{dt} + \vec{\omega}_{F|_F} \times \vec{a}_{1|_F}$$

- ACHTUNG auf das richtige $\vec{\omega}_F$!

5. Relativkinematik

- Anwendung empfohlen, wenn ein Führungssystem UND eine Relativbewegung vorliegt.

Geschwindigkeit: $\vec{v}_{abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_{rel}$

Mit

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{0F} + \vec{\omega}_F \times \vec{r}_{rel}$$

$$\vec{v}_{rel} = \frac{d|_F \vec{r}_{rel}}{dt}$$

Beschleunigung: $\vec{a}_{abs} = \vec{a}_F + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}$

Mit

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{OF} + \dot{\vec{\omega}}_F \times \vec{r}_{rel} + \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \vec{r}_{rel})$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_F \times \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{a}_{rel} = \frac{d|_F \vec{v}_{rel}}{dt}$$

- Punkt OF ist der Koordinatenursprung des Führungssystems.
- Vektor $\vec{r}_{rel}$ ist der Vektor von Punkt OF zum gesuchten Punkt.
- $\vec{v}_{0F}$ bzw $\vec{a}_{OF}$ sind absolute Größen!

6. Schwerpunktsatz (Kinetik)

- Liefert direkt eine Bewegungsgleichung
- Immer anwendbar
- Empfohlen: Masse freischneiden, immer nur für eine Masse anwenden

$$m\vec{a}_s = \Sigma\vec{F}$$

7. Drall & Drallsatz

- Liedert direkt eine Bewegungsgleichung
- Ist eine (vektorielle) Erhaltungsgröße (bleibt in einem abgeschlossenem System konstant
- Immer anwendbar
- Empfohlen: Masse freischneiden, immer nur für eine Masse anwenden

Drall bezüglich Schwerpunkt S: $\vec{L}_s = I_s\vec{\omega}_{abs}$

$$\vec{L}_s = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{yx} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{zy} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

- Trägheitstensor hat die Diagonalform, wenn die Deviationsmomente null sind, siehe: Trägheitshauptachsen
- In der Hauptdiagonale stehen die Massenträgheitsmomente (bezogen auf S)

Umrechnen des Dralls auf einen beliebigen Punt P:

$$\vec{L}_p = \vec{L}_s + \vec{r}_{sp} \times m\vec{v}_{sp}$$

Mit $$\vec{v}_{sp} = \frac{d|_0 \vec{r}_{sp}}{dt}$$

Drallsatz in allgemeiner Form (Darstellung im Führungssystem):

$$\frac{d|_F \vec{L}_{P|_F}}{dt} + \vec{\omega}_{F|_F} \times \vec{L}_{P|_F} + \vec{r}_{sP|_F} \times m\vec{a}_{P|_F} = \sum M_P$$

Drallsatz in Kurzform:

$$I_P \dot{\omega} = \Sigma M_P$$

- Gilt nur im ebenen Fall UND der Bezugspunkt „P“ muss Schwerpunkt S oder inertialfest sein oder die Beschleunigung des Punktes „P“ muss parallel zum Vektor $\vec{r}_{sp}$ sein.

8. Energie & Energiesatz

- Skalare Größe und Erhaltungsgröße (bleibt in einem abgeschlossenem System konstant)
- Kinetische Energie ist eine Momentangröße!

Kinetische Energie T eines starren Körpers bezüglich Punkt A:

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 + \overrightarrow{r_S}_A m(\vec{v}_A \times \vec{\omega}) + \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

Potentielle Energie Federn & Gewichtskraft:

$$V_F = \frac{1}{2}\, c\, \Delta x^2$$

$$V_{DF} = \frac{1}{2}\, cT\, \Delta\varphi^2$$

$$V_G = \pm mgh$$

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

- Nur anwenden bei 1 Freiheitsgrad und einem rein konservativen System!

9. Arbeit & Arbeitssatz

$W_F = \int F\, ds$ $\qquad\qquad$ $W_M = \int M\, d\varphi$

$T_2 - T_1 = W_{1\to 2}$

- Arbeit ist KEINE Momentangröße!
- Nur anwenden bei 1 Freiheitsgrad!

10. Leistung & Leistungssatz

- Leistung ist eine Momentangröße!

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum P$$

- Nur anwenden bei 1 Freiheitsgrad!
- Liefert direkt eine Bewegungsgleichung

11. Schwingungen

Harmonische Schwingung:

$$x(t) = A\,sin(\omega t)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{\tau}$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$$

- ω_0 aus der Bewegungsgleichung ablesen
- Im ungedämpften Fall ist $\omega_0 = \omega$ da D = 0

$$x(t) = xp + xh$$

$$xp(t) = cp_0 + cp_1\,sin(\Omega t) + cp_2\,cos(\Omega t)$$

- Partikulären Ansatz ableiten, in die Bewegungsgleichung einsetzen, Koeffizientenvergleich machen und Gleichungssystem lösen

Homogene Lösung ungedämpft:

$$xh(t) = c_1\,cos(\omega t) + c_2\,sin(\omega t)$$

Homogene Lösung gedämpft:

a) Stark gedämpft (D > 1, keine Schwingung)

$$xh(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

b) Kritisch gedämpft (D = 1, Grenzfall der Schwingung)

$$xh(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t}$$

c) Schwach gedämpft (D < 1, Schwingung vorhanden)

$$xh(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \, cos(\omega t) + c_2 \, sin(\omega t))$$
$$\alpha = D\omega_0$$

- c1 und c2 aus den Anfangsbedingungen berechnen
- Rotatorische Bewegungsgleichungen IMMER linearisieren (sin/cos)

12. Stoß

Impulsbilanz:

$$\vec{p}' - \vec{p} = \sum \vec{S}$$

- Geschwindigkeiten vom Schwerpunkt!
- Vorzeichen beachten
- Betrachtung berücksichtigen (Systemgrenze!)
- Immer anwendbar

Drehimpulsbilanz:

$$\vec{L}'_A - \vec{L}_A + \vec{r}_{s_A} \times m(\vec{v}'_A - v_A) = \sum r \times S$$

- Immer anwendbar
- Vorzeichen beachten
- Angriffspunkt von S beachten!
- Betrachtung berücksichtigen (Systemgrenze!)

Stoßhypothese:

$$\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = -e(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

- Vorzeichen beachten
- Geschwindigkeiten vom Stoßpunkt
- Gilt nur entlang der Stoßnormale (bei normaler Stoßziffer)
- Immer anwendbar

Energiebilanz:

$$T = T'$$

- Gilt nur bei e = 1 (vollkommen elastischer Stoß)